

Multiplicação de matrizes eficiente

As ideias que nós acabamos de ver podem ser aplicadas de maneira semelhante ao problema da multiplicação de matrizes.

Considere duas matrizes M, N com dimensões $n \times n$, particionadas em 4 blocos do mesmo tamanho:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}$$

Então, a multiplicação de M e N pode ser expressa como

$$M \cdot N = \begin{bmatrix} (AE + BG) & (AF + BH) \\ (CE + DG) & (CF + DH) \end{bmatrix}$$

Como no caso da multiplicação de inteiros, a solução não requer que os produtos $AE, BG, \dots, DH$ sejam calculados individualmente.

Tudo o que precisamos são as 4 somas acima.

Daí que, um dia em que V. Strassen não tinha coisa melhor para fazer, ele ficou brincando com isso.

E descobriu que as somas podem ser calculadas realizando apenas 7 multiplicações.

A ideia é a seguinte.

- 1. primeiro, a gente calcula os seguintes componentes

$$\begin{aligned} C_1 &= (A + D) \cdot (E + H) \\ C_2 &= (C + D) \cdot E \\ C_3 &= A \cdot (F - H) \\ C_4 &= D \cdot (G - E) \\ C_5 &= (A + B) \cdot H \\ C_6 &= (C - A) \cdot (E + F) \\ C_7 &= (B - D) \cdot (G + H) \end{aligned}$$

- 2. e depois, os somas são calculadas assim

$$\begin{aligned} AE + BG &= C_1 + C_4 - C_5 + C_7 \\ AF + BH &= C_3 + C_5 \\ CE + DG &= C_2 + C_4 \\ CF + DH &= C_1 - C_2 + C_3 + C_6 \end{aligned}$$

Dessa maneira, nós obtemos um algoritmo de divisão e conquista para a multiplicação de matrizes com tempo de execução descrito pela recorrência

$$T(n) = 7 \cdot T(n/2) + O(n^2)$$

que possui solução

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 7}) = \Theta(n^{2,8})$$

Seguindo o exemplo de Strassen, outros descobriram decomposições mais sofisticadas, e hoje já se conhecem algoritmos que realizam a multiplicação de matrizes em tempo $O(n^{2,37})$.