

Construção e Análise de Algoritmos

lista de exercícios 10

1. Multiplicação de inteiros mais eficiente ainda (?)

Imagine que alguém decide reduzir ainda mais o tempo da multiplicação de inteiros dividindo os números em 3 partes ao invés de 2.

$$X = X_3 \cdot 10^{2n/3} + X_2 \cdot 10^{n/3} + X_1$$

Qual o número máximo de multiplicações de números com $n/3$ dígitos que ela pode realizar, para que o seu algoritmo seja mais eficiente do que aquele apresentado na aula?

Você consegue fazer as coisas funcionarem dessa maneira?

2. O método do Euclides

O método de Euclides para o cálculo do MDC de dois números a e b é baseado na seguinte observação

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$$

onde r é o resto da divisão de a por b , e nós estamos assumindo que $a > b$.

Note que essa estratégia para o cálculo do MDC nos dá mais um exemplo de aplicação da técnica de divisão e conquista.

Escreva o pseudo-código do algoritmo que calcula o MDC de a e b pelo método de Euclides.

Estime o tempo de execução do seu algoritmo, assumindo que a e b são números com n dígitos.

3. Outro método para o cálculo do MDC

Nesse exercício, nós vamos ver uma estratégia alternativa de divisão e conquista para o cálculo do MDC.

a) Verifique que a seguinte recorrência para o MDC é válida

$$\text{mdc}(a, b) = \begin{cases} 2 \cdot \text{mdc}(a/2, b/2) & , \text{ se } a \text{ e } b \text{ são ambos pares} \\ \text{mdc}(a/2, b) & , \text{ se } a \text{ é par e } b \text{ é ímpar} \\ \text{mdc}(a, b/2) & , \text{ se } a \text{ é ímpar e } b \text{ é par} \\ \text{mdc}((a-b)/2, b) & , \text{ se } a \text{ e } b \text{ são ambos ímpares} \end{cases}$$

- b) Apresente um algoritmo de divisão e conquista para o cálculo do MDC baseado nessa recorrência.
- c) Estime o tempo de execução desse algoritmo, assumindo que a e b são números com n dígitos.

4. Convolução

A distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta X pode ser representada na forma de um vetor como

$$f_X = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$$

onde $p_k = P(X = k)$.

Por exemplo, se X é o número de **Caras** obtidas no lançamento de 4 moedas comuns, então a sua distribuição de probabilidades é

$$f_X = \left(\frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16} \right)$$

Agora, suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes, com distribuições de probabilidades

$$f_X = (p_0, p_1, p_2, \dots, p_n) \quad f_Y = (q_0, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

Então, $X + Y$ também é uma variável aleatória, com distribuição de probabilidades

$$f_{X+Y} = (r_0, r_1, r_2, \dots, r_{2n})$$

onde cada probabilidade r_k é calculada da seguinte maneira

$$r_k = \sum_{i+j=k} p_i \cdot q_j$$

A operação que produz o vetor f_{X+Y} a partir dos vetores f_X e f_Y é conhecida como *convolução*.

A implementação ingênua dessa operação, de acordo com a equação acima, executa em tempo $\Theta(n^2)$.

Apresente um algoritmo de divisão e conquista que calcula a convolução de dois vetores de maneira mais eficiente do que isso.